PHÉP CHUYỂN ĐỔI TOẠ ĐỘ HELMERT VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG TRONG TRẮC ĐỊA CÔNG TRÌNH

ThS. HOÀNG THỊ MINH HƯƠNG, PGS.TS. NGUYỄN QUANG PHÚC, TS. NGUYỄN VIỆT HÀ, ThS. NGUYỄN HÀ - *Trường Đại học Mỏ-Địa chất*

Để biểu diễn vị trí của một điểm trên mặt đất hay trong không gian, cần sử dụng một hệ tọa độ nhất định nào đó. Mỗi hệ tọa độ đều có những quy ước, những quy tắc thành lập nhất định và giữa chúng đều có những mối quan hệ hình học và toán học rất chặt chẽ. Trong những trường hợp cần thiết hoàn toàn có thể chuyển đổi qua lại giữa các hệ tọa độ. Phép chuyển đổi tọa độ của Helmert đơn giản là phép biến đổi xoay, đồng dạng giữa 2 hệ tọa độ phẳng. Tuy nhiên, nó lại có những ứng dụng rất hữu hiệu để giải quyết một số nhiệm vụ của trắc địa công trình: tính chuyển giữa hệ tọa độ công trình với các hệ tọa độ khác; xác định các thông số chuyển dịch biến dạng công trình hay xử lý các mạng lưới chuyên dùng của trắc địa công trình.

1. Bài toán chuyển đổi tọa độ Helmert

Giả sử có 2 mạng lưới trắc địa đã được bình sai riêng biệt, trong đó có các điểm chung với các tọa độ là x_i, y_i và x_i', y_i'. Khi đó đặt ra bài toán tính chuyển tọa độ từ hệ này sang hệ khác. Công thức quen thuộc để tính chuyển tọa độ có dạng [5]:

$$\begin{cases} x_i = a_x + x'_i.m_0.\cos\varphi - y'_i.m_0.\sin\varphi \\ y_i = a_y + x'_i.m_0.\sin\varphi + y'_i.m_0.\cos\varphi \end{cases} \quad (1)$$

Trong đó: φ - Góc xoay giữa 2 hệ tọa độ; m_0 - Hệ số tỷ lệ; a_x và a_y - Tọa độ điểm gốc O' của hệ tọa độ x'O'y' trong hệ tọa độ xOy (H.1).

Ký hiệu: $\alpha = m_0.\cos\varphi$; $\beta = m_0.\sin\varphi$ sẽ có:

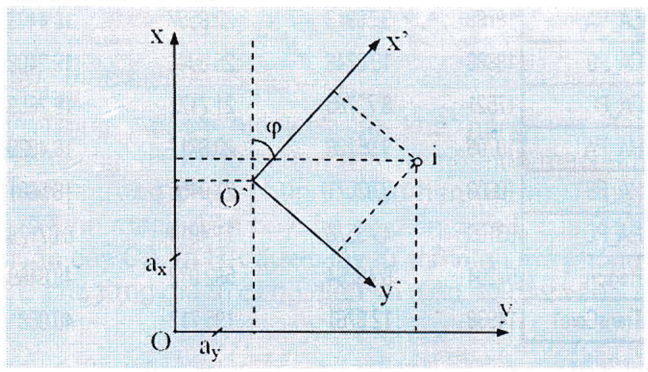
$$\begin{cases} x_i = a_x + x'_i\alpha - y'_i\beta \\ y_i = a_y + y'_i\alpha + x'_i\beta \end{cases} \quad (2)$$

Hoặc viết lại theo cách sau:

$$\begin{cases} x_i - x'_i = a_x + x'_i(\alpha - 1) - y'_i\beta \\ y_i - y'_i = a_y + y'_i(\alpha - 1) + x'_i\beta \end{cases} \quad (3)$$

Nếu dịch chuyển gốc tọa độ trong mỗi hệ về điểm trọng tâm có các tọa độ $x_0=[x_i]/n, y_0=[y_i]/n$ và $x'_0=[x'_i]/n$, $y'_0=[y'_i]/n$, với n là số điểm của lưới thì khi đó, tọa độ trọng tâm của các điểm trong mỗi hệ tương ứng được xác định là:

$\bar{x}_i = x_i - x_0$, $\bar{y}_i = y_i - y_0$ và $\bar{x}'_i = x'_i - x'_0$, $\bar{y}'_i = y'_i - y'_0$.



H.1. Quan hệ giữa hai hệ tọa độ phẳng.

Với các tọa độ trọng tâm, hệ (3) được viết lại như sau:

$$\begin{cases} \bar{x}_i - \bar{x}'_i = a_{\bar{x}} + \bar{x}'_i\bar{\alpha} - \bar{y}'_i \\ \bar{y}_i - \bar{y}'_i = a_{\bar{y}} + \bar{y}'_i\bar{\alpha} - \bar{x}'_i\beta \end{cases} \quad (4)$$

Trong đó đã ký hiệu $\bar{\alpha} = \alpha - 1$.

Xem các hiệu số: $\bar{x}_i - \bar{x}'_i = -l_{\bar{x}_i}$, $\bar{y}_i - \bar{y}'_i = -l_{\bar{y}_i}$ như là những "trị đo" độc lập và cùng độ chính xác, sẽ lập được hệ phương trình số hiệu chỉnh:

$$\begin{cases} v_{\bar{x}_i} = a_{\bar{x}} + \bar{x}'_i\bar{\alpha} - \bar{y}'_i\beta + l_{\bar{x}_i} \\ v_{\bar{y}_i} = a_{\bar{y}} + \bar{y}'_i\bar{\alpha} + \bar{x}'_i\beta + l_{\bar{y}_i} \end{cases} \quad (5)$$

Với n điểm chung, ta có hệ phương trình số hiệu chỉnh viết dưới dạng ma trận:

$$V = BZ + L. \quad (6)$$

Trong đó: $B=(B_1 \quad B_2 \dots B_n)^T$ với:

$$B_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bar{x}'_i & -\bar{y}'_i \\ 0 & 1 & \bar{y}'_i & \bar{x}'_i \end{pmatrix}; \quad (7)$$

vector tham số $Z=\left(a_{\overline{x}}\ a_{\overline{y}}\ \overline{\alpha}\ \beta\right)^T$ và vector số hạng tự do $L=\left(l_{\overline{x}_1}\ l_{\overline{y}_1}\ \ldots\ l_{\overline{x}_n}\ l_{\overline{y}_n}\right)^T$.

Theo nguyên lý số bình phương nhỏ nhất V^TV=min, từ (6) lập được hệ phương trình chuẩn RZ + b = 0, trong đó:

$$R=B^TB=\begin{bmatrix} n & 0 & [\overline{x}'] & -[\overline{y}'] \\ 0 & n & [\overline{y}'] & [\overline{x}'] \\ [\overline{x}'] & [\overline{y}'] & r & 0 \\ -[\overline{y}'] & [\overline{x}'] & 0 & r \end{bmatrix};$$

$$b=B^TL=\begin{bmatrix} [l_{\overline{x}}] \\ [l_{\overline{y}}] \\ [\overline{x}'.l_{\overline{x}}]+[\overline{y}'.l_{\overline{y}}] \\ -[\overline{y}'.l_{\overline{x}}]+[\overline{x}'.l_{\overline{y}}] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{a_{\overline{x}}} \\ b_{a_{\overline{y}}} \\ b_{\overline{\alpha}} \\ b_{\beta} \end{bmatrix} \quad (8)$$

với $r=\left[\overline{x}_i'^2\right]+\left[\overline{y}_i'^2\right]$. Theo tính chất của hệ tọa độ trọng tâm thì $[\overline{x}]=[\overline{y}]=0; [\overline{x}']=[\overline{y}']=0$, đồng thời có $[l_{\overline{x}}]=0, [l_{\overline{y}}]=0$. Do vậy:

$$\begin{cases} b_{a_{\overline{x}}}=b_{a_{\overline{y}}}=0 \\ b_{\overline{\alpha}}=[\overline{x}'.l_{\overline{x}}]+[\overline{y}'.l_{\overline{y}}] \\ b_{\beta}=-[\overline{y}'.l_{\overline{x}}]+[\overline{x}'.l_{\overline{y}}] \end{cases} \quad (9)$$

Từ đây thấy rằng các tham số a_x và a_y cũng bằng 0, còn các tham số $\overline{\alpha}$ và β sẽ được xác định từ việc giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} r.\overline{\alpha}+b_{\overline{\alpha}}=0 \\ r.\beta+b_{\beta}=0 \end{cases} \quad (10)$$

Sau khi tìm được $\alpha=\overline{\alpha}+1$, sẽ tìm được hệ số tỷ lệ $m_0=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ và góc xoay $\varphi=\mathrm{arctg}(\beta/\alpha)$.

Để xác định các tham số a_x và a_y, chúng ta viết hệ phương trình số hiệu chỉnh ở dạng không chuyển qua hệ tọa độ trọng tâm như sau:

$$\begin{cases} v_{x_i}=a_x+x_i'\overline{\alpha}-y_i'\beta+x_i'-x_i \\ v_{y_i}=a_y+y_i'\overline{\alpha}+x_i'\beta+y_i'-y_i \end{cases} \quad (11)$$

Theo bổ đề Gauss $B^TV=0$, trong bài toán này chúng ta có $[v_x]=[v_y]=0$ [2]. Do vậy, nếu lấy tổng các phương trình số hiệu chỉnh v_x và v_y rồi chia cho n, sẽ được:

$$\begin{cases} a_x=-x_0'\alpha+y_0'\beta+x_0 \\ a_y=-y_0'\alpha-x_0'\beta+y_0 \end{cases} \quad (12)$$

Trong trường hợp góc φ nhỏ, có thể xác định các thông số chuyển đổi tọa độ cũng bằng cách giải hệ phương trình (6) nhưng trong đó [2]:

$$Z=\left(a_x\ a_y\ \varphi\ m\right)^T;\ B_i=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \overline{y}_i & \overline{x}_i \\ 0 & 1 & -\overline{x}_i & \overline{y}_i \end{bmatrix}. \quad (13)$$

2. Ứng dụng phép chuyển đổi Helmert để tính chuyển tọa độ Trắc địa công trình

2.1. Sự cần thiết phải tính chuyển và quy trình tính

Như đã biết, lưới khống chế thi công là dạng lưới cục bộ, được xác định độc lập trong hệ tọa độ của công trình và được phát triển dựa trên các điểm lưới tọa độ Nhà nước. Vì vậy trong những trường hợp cần thiết, phải tính chuyển qua lại giữa hai loại tọa độ này. Trong bài toán chuyển đổi tọa độ Helmert đã trình bày ở trên, để xác định vector tham số Z, cần ít nhất 2 điểm có tọa độ trong cả 2 hệ (gọi là điểm song trùng). Khi số điểm song trùng lớn hơn 2, vector tham số Z sẽ được xác định theo nguyên lý số bình phương nhỏ nhất. Sau khi tìm được vector tham số Z sẽ tính chuyển tọa độ cho các điểm còn lại không phải là điểm song trùng.

2.2. Thực nghiệm tính chuyển

Ví dụ dưới đây sẽ thực nghiệm tính chuyển từ hệ tọa độ công trình sang hệ tọa độ Nhà nước cho một mạng lưới khống chế thi công. Tọa độ công trình của các điểm cho trong Bảng 1. Tọa độ của các điểm song trùng cho trong Bảng 2.

Dựa vào các thuật toán đã trình bày ở trên để xác định các tham số tính chuyển. Kết quả thu được như sau: a_x=-36,2006 m; a_y=-60,7160 m; φ=2,73267693.10^{-5} rad.; m_0=1,00000693264. Sử dụng các tham số này để tính chuyển tọa độ cho các điểm còn lại (là các điểm từ TD-06 đến TD-10). Kết quả thu được như sau (Bảng 3).

Bảng 1. Tọa độ công trình của các điểm khống chế

TT	Tên điểm	Tọa độ	
		X (m)	Y (m)
1	TD-01	2140250,0869	446040,6530
2	TD-02	2140503,2359	445462,0890
3	TD-03	2140177,2028	445322,0688
4	TD-04	2139702,9803	445518,1788
5	TD-05	2139411,8688	445832,3288
6	TD-06	2139896,9064	446135,0625
7	TD-07	2139312,1682	446173,1471
8	TD-08	2138769,3787	445961,2818
9	TD-09	2138899,7677	446552,2180
10	TD-10	2139577,0834	446452,9045

Bảng 3. Kết quả tính chuyển tọa độ.

TT	Tên điểm	Tọa độ	
		X' (m)	Y' (m)
1	TD-06	2139863,3487	446135,9161
2	TD-07	2139278,6054	446173,9850
3	TD-08	2138735,8179	445962,1034
4	TD-09	2138866,1916	446553,0472
5	TD-10	2139543,5148	446453,7516

3. Ứng dụng phép chuyển đổi Helmert xác định thông số chuyển dịch công trình

Phép chuyển đổi tọa độ Helmert cũng có thể được sử dụng trong phân tích biến dạng để xác định các thông số chuyển dịch tổng thể của công trình. Trở lại với công thức (4), nếu đặt các hiệu số $\bar{x}_i - \bar{x}_i^{'} = -Q_{\bar{x}_i}$ và $\bar{y}_i - \bar{y}_i^{'} = -Q_{\bar{y}_i}$, với $Q_{\bar{x}_i}$ và $Q_{\bar{y}_i}$ là chuyển dịch của điểm i theo các hướng trục tọa độ và giải hệ (4) dưới điều kiện $[Q_{\bar{x}}^2]+[Q_{\bar{y}}^2]=\min$ thì khi đó, vector tham số Z tìm được sẽ đặc trưng cho chuyển dịch tổng thể của công trình. Xem xét một ví dụ sau đây: giả sử có 5 điểm quan trắc gắn trên một công trình dạng thẳng; tọa độ của chúng trong 2 chu kỳ liên tiếp được cho trong Bảng 4.

Bảng 2. Tọa độ của các điểm song trùng

TT	Tên điểm	Tọa độ công trình		Tọa độ Nhà nước	
		X (m)	Y (m)	X' (m)	Y' (m)
1	TD-01	2140250,0869	446040,6530	2140216,5312	446041,5336
2	TD-02	2140503,2359	445462,0890	2140469,6982	445462,9366
3	TD-03	2140177,2028	445322,0688	2140143,6671	445322,9324
4	TD-04	2139702,9803	445518,1788	2139669,4386	445519,0214
5	TD-05	2139411,8688	445832,3288	2139378,3231	445833,1604

Bảng 4. Tọa độ của các điểm quan trắc trong 2 chu kỳ

TT	Tên điểm	Tọa độ trong chu kỳ 1		Tọa độ trong chu kỳ 2	
		X1 (m)	Y1 (m)	X2 (m)	Y2 (m)
1	QT-01	2416.369	3017.045	2416.371	3017.043
2	QT-02	2416.358	3050.181	2416.355	3050.179
3	QT-03	2416.375	3079.846	2416.380	3079.843
4	QT-04	2416.349	3107.784	2416.357	3107.782
5	QT-05	2416.381	3131.328	2416.387	3131.330
Trọng tâm		2416.366	3077.237	2416.370	3077.235

Sử dụng các thuật toán nêu ở trên, đã xác định được các thông số chuyển dịch tổng thể của công trình như sau: hệ số tỷ lệ m_0=1,000026; chuyển dịch trọng tâm theo hướng trục X $Q_{x_0}=+3{,}6$ mm; chuyển dịch trọng tâm theo hướng trục Y $Q_{y_0}=-1{,}4$ mm; góc xoay của hai hệ trục: φ-$0^0\,00'\,13{,}6''$.

4. Phép chuyển đổi Helmert và bài toán bình sai lưới tự do trắc địa công trình

4.1. Thủ thuật giải bài toán bình sai lưới tự do có số khuyết d>0

4.1.1. Bài toán bình sai lưới tự do có số khuyết d>0

Lưới thi công và lưới quan trắc biến dạng là dạng lưới chuyên dùng của trắc địa công trình, có bản chất là lưới tự do với số khuyết d>0 (gọi tắt là lưới tự do d>0). Trong trường hợp này, ma trận hệ số A và ma trận hệ số hệ phương trình chuẩn R có d cột phụ thuộc tuyến tính, không giải được theo cách thông thường. Để khử số khuyết d>0, các ẩn số phải được xác định với điều kiện bổ sung $C^TX=0$, trong đó ma trận hệ số C phải có d cột độc lập tuyến tính. Điều kiện V^TPV=min sẽ dẫn đến hệ phương trình chuẩn:

$$\begin{bmatrix} R & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad (14)$$

có ma trận hệ số không suy biến nữa. Khi đó, tồn tại ma trận giả nghịch đảo [3]:

$$R^{\sim} = (R + CC^T)^{-1} - TT^T \qquad (15)$$

Tiếp theo, sẽ sử dụng $R^{\sim}$ để bình sai và đánh giá độ chính xác các yếu tố của mạng lưới.

Trong (15), T là ma trận trung gian được xác định theo công thức: $T=B(C^TB)^{-1}$, với B là ma trận chuyển đổi tọa độ của Helmert [2], [6]. Ma trận B bao gồm một chuỗi các ma trận con B_i được xác định theo công thức (13) cũng với d cột độc lập tuyến tính, có các tính chất AB=0 và RB=0. Điều đáng lưu ý là giữa ma trận C và B luôn quan hệ với nhau bởi đẳng thức $C=E_0B$, trong đó [4]:

$$E_0=\begin{bmatrix}E_k & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}. \qquad (16)$$

Đẳng thức (16) cho thấy: điều kiện bổ sung $C^TX=0$ chỉ ràng buộc đối với k ẩn số ($k\le t$) của vector X. Chỉ có một trường hợp duy nhất khi C=B. Khi đó, $T=B(B^TB)^{-1}=B$.

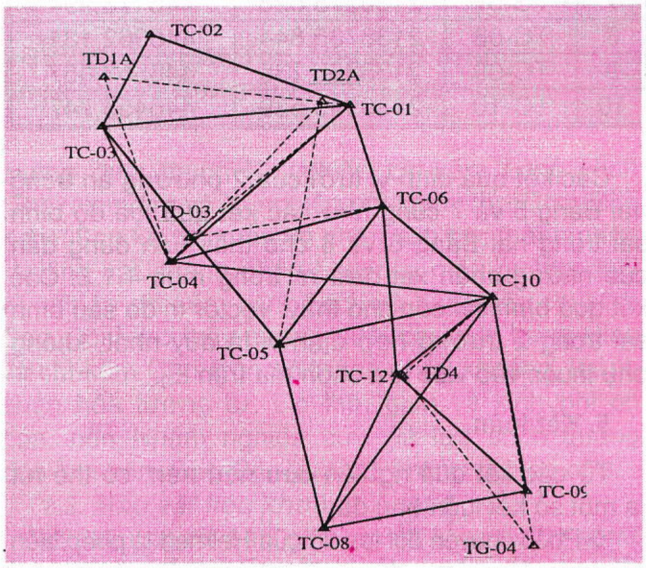
4.1.2. Nhận xét. Từ những vấn đề trên, có thể thấy điều kiện bổ sung $C^TX=0$ đã được xác lập trên cơ sở của bài toán chuyển đổi tọa độ của Helmert. Về mặt thủ thuật, nó được đưa vào bài toán bình sai lưới tự do d>0 để cho bài toán trở nên giải được, nhưng lại có ý nghĩa rất quan trọng trong việc định vị lưới tự do d>0 của trắc địa công trình, tùy thuộc vào việc chúng ta lựa chọn đẳng thức (16). Hiển nhiên là với những lựa chọn khác nhau của đẳng thức (16) sẽ có một tập nghiệm X tương ứng, hay nói cách khác, lưới được định vị theo k ẩn số được chọn, thỏa mãn điều kiện $C^TX=0$.

4.2. Tính toán thực nghiệm

Mạng lưới được lấy làm thực nghiệm [1] bao gồm 15 điểm (H.2), trong đó có 10 điểm mới thành lập và 5 điểm cũ đã có tọa độ, dùng để đo nối. Thực hiện bình sai lưới theo 2 phương án:

- ❖ Phương án 1 - Định vị lưới theo 3 điểm cũ TD-03, TD-04 và TG-04;
- ❖ Phương án 2 - Định vị lưới theo cả 5 điểm cũ TD-01, TD-02, TD-03, TD-04 và TG-04.

Trong Bảng 5 và 6 đưa ra kết quả kiểm tra điều kiện định vị và tọa độ sau bình sai theo Phương án 1; Bảng 7 và 8 đưa ra kết quả kiểm tra điều kiện định vị và tọa độ sau bình sai theo Phương án 2.



H.2. Sơ đồ lưới thực nghiệm

Bảng 5. Kiểm tra điều kiện định vị (Phương án 1).

Tên điểm định vị	Tọa độ x/y	Ma trận định vị C (quy chuẩn)			Vector X	C^TX		
TD-03	2139752,253	0,5773	0,0000	-0,5140	+0,000	0,000	0,000	0,000
	445578,987	0,0000	0,5773	-0,4988	+0,003	0,000	0,017	-0,015
TD-04	2139270,864	0,5773	0,0000	0,0740	-0,003	-0,017	0,000	-0,002
	446191,410	0,0000	0,5773	-0,0366	-0,004	0,000	-0,023	0,001
TG-04	2138675,031	0,5773	0,0000	0,4400	+0,003	0,017	0,000	0,013
	446572,693	0,0000	0,5773	0,5354	+0,001	0,000	0,006	0,005
Kiểm tra điều kiện định vị: $C^TX=$						0,000	0,000	0,000

Bảng 7. Kiểm tra điều kiện định vị (Phương án 2).

Tên điểm định vị	Tọa độ x/y	Ma trận định vị C (quy chuẩn)			Vector X	C^TX		
TD-01	2140321,570	0,4472	0,0000	-0,3541	-0,002	-0,001	0,000	0,001
	445327,245	0,0000	0,4472	-0,3974	-0,004	0,000	-0,002	0,002
TD-02	2140228,386	0,4472	0,0000	0,0200	-0,008	-0,004	0,000	0,000
	445959,779	0,0000	0,4472	-0,3423	+0,011	0,000	0,005	-0,004
TD-03	2139752,253	0,4472	0,0000	-0,2052	+0,002	0,001	0,000	0,000
	445578,987	0,0000	0,4472	-0,0607	-0,001	0,000	0,000	0,000
TD-04	2139270,864	0,4472	0,0000	0,1570	+0,001	0,000	0,000	0,000
	446191,410	0,0000	0,4472	0,2240	-0,007	0,000	-0,003	-0,002
TG-04	2138675,031	0,4472	0,0000	0,3824	+0,008	0,004	0,000	0,003
	446572,693	0,0000	0,4472	0,5764	+0,001	0,000	0,000	0,001
Kiểm tra điều kiện định vị: $C^TX=$						0,000	0,000	0,000

Bảng 6. Tọa độ bình sai của các điểm (Ph.án 1).

TT	Tên điểm	Tọa độ	
		x (m)	y (m)
1	TC-01	2140216,533	446041,503
2	TC-02	2140469,679	445462,947
3	TC-03	2140143,650	445322,930
4	TC-04	2139669,434	445519,037
5	TC-05	2139378,329	445833,180
6	TC-06	2139863,356	446135,910
7	TC-07	2139278,628	446173,994
8	TC-08	2138735,844	445962,131
9	TC-09	2138866,235	446553,057
10	TC-10	2139543,539	446453,747

Bảng 8. Tọa độ bình sai của các điểm (Ph.án 2).

TT	Tên điểm	Tọa độ	
		x (m)	y (m)
1	TC-01	2140216.536	446041.497
2	TC-02	2140469.680	445462.941
3	TC-03	2140143.651	445322.925
4	TC-04	2139669.436	445519.033
5	TC-05	2139378.331	445833.178
6	TC-06	2139863.359	446135.905
7	TC-07	2139278.631	446173.991
8	TC-08	2138735.847	445962.130
9	TC-09	2138866.240	446553.056
10	TC-10	2139543.543	446453.744

Các kết quả định vị lưới của 2 phương án trong hai Bảng 5 và 7 cũng như các kết quả tọa độ bình sai trong hai Bảng 6 và 8 cho thấy tính đúng đắn của những nhận xét đưa ra trong mục 4.1.2. Các kết quả bình sai còn cho thấy: vector trị đo sau bình sai trong 2 trường hợp định vị là duy nhất, không phụ thuộc vào việc lựa chọn ma trận E_0.

5. Kết luận

Từ các kết quả nghiên cứu nêu trên, có thể rút ra một số kết luận sau đây:

❖ Phép chuyển đổi tọa độ của Helmert là phép biến đổi xoay, đồng dạng để chuyển đổi tọa độ giữa các hệ tọa độ phẳng, nhưng được sử dụng rất hiệu quả để giải quyết nhiều nhiệm vụ của trắc địa công trình;

❖ Trong xử lý số liệu các mạng lưới tự do d>0 theo mô hình bài toán bình sai gián tiếp kèm điều kiện, điều kiện $C^TX=0$ được xác lập trên cơ sở của bài toán chuyển đổi tọa độ của Helmert. Điều kiện này được đưa vào bài toán bình sai lưới tự do d>0 để giải quyết đồng thời 2 nhiệm vụ: bình sai lưới; định vị lưới;

❖ Nếu chỉ bình sai lưới mà không đặt vấn đề định vị lưới thì chỉ cần áp dụng phương pháp bình sai trị đo, tức là bình sai điều kiện ngay cả đối với những mạng lưới tự do d>0. Hiển nhiên là trong trường hợp này, không cần bổ sung điều kiện $C^TX=0$.□

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Quang Phúc (2010). Nghiên cứu hoàn thiện phương pháp thành lập và xử lý số liệu lưới khống chế thi công các công trình xây dựng trong điều kiện Việt Nam. Đề tài KHCN cấp Bộ (Bộ GD&ĐT). Mã số: B2008-02-52. Thư viện Trường Đại học Mỏ-Địa chất.

2. Большаков В.Д., Маркузе Ю. И., Голубев В.В. (1989). Уравнивание геодезических построений. Справочное пособие - Москва, Изд. Недра. 413 с. (стр. 302).

3. Маркузе Ю.И. и Князев А.Г. (1986). О корреляционной матрице неизестных в свободной сети. Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. Москва – N^0 6/1986, стр.12-21.

4. Маркузе Ю.И. (1986). Способ временной фиксации неизвестных при уравнивании геодезических сетей со свободными блоками.- Изв. ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. N^0 4/1986, стр. 13-24.

5. Маркузе Ю.И. (1989). Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ - Изд. Недра, Москва.

6. Маркузе Ю.И. (2005). Основы метода наименьших квадратов и уравнительных вычислений. Учебное пособие. М., МИИГАиК, 280 с. (стр. 152).

Người biên tập: Hồ Sĩ Giao

SUMMARY

To determine the location of a point on the ground or in space, need to use a certain coordinates system. Each coordinate system to be built in a reference frame according to certain conventions. This raises the need to switch between the coordinates systems in case of necessity. The Helmert coordinates transformation is one of the algorithms to convert coordinates between two the plane coordinate system, previously used to connect the plane geodetic networks. In this paper, the authors mention some applications of the Helmert coor-dinates transformation in engineering surveying.